CENTRUL JUDEȚEAN excelență BISTRIȚA-NĂSĂUD

ADMITERE ÎN GRUPA DE EXCELENȚĂ
Disciplina: MATEMATICĂ
28 SEPTEMBRIE 2019
barem de corectare

VIII

SUBIECTUL I

Să se arate că nu există numere întregi a, b, c astfel încât $abc - a = 1983$, $abc - b = 20$, $abc - c = 4$

Soluție: $c \cdot (ab - 1) = 4 \Longrightarrow abc = c + 4 \leq 8 \Longrightarrow abc \leq 8 \ \ (1)$ **2p**

$abc - b = 20 \Longrightarrow b \cdot (ac - 1) = 20 \Longrightarrow b/20 \Longrightarrow -20 \leq b \leq 20$ **2p**

$b = -20 \Longrightarrow a = 0\ sau\ c = 0 \Longrightarrow nu\ verifică.\ Deci\ b > -20 \Longrightarrow b \geq -10 \Longrightarrow abc = b + 20 \geq -10 + 20 = 10.\ Dar\ se\ obține\ contradicție\ cu\ (1).$ **3p**

SUBIECTUL II

Numerele x, y, z sunt numere naturale cu proprietatea că $x < y < z$. Dacă x, y, z sunt direct direct proporționale cu 3 numere naturale consecutive, în câte moduri diferite poate fi scris numărul 180 sub forma $x + y + z$?

Soluție:

$\frac{x}{a-1} = \frac{y}{a} = \frac{z}{a+1} \Longrightarrow \frac{x+y+z}{3a} = \frac{180}{3a} = \frac{60}{a}$ **2p**

$\frac{y}{a} = \frac{60}{a} \Longrightarrow y = 60$ **1p**

$\frac{x}{a-1} = \frac{60}{a} \Longrightarrow a\ /\ 60$ **2p**

Deci a poate lua 11 valori distincte. **2p**

SUBIECTUL III

În triunghiul ABC avem $m(\sphericalangle ABC) = 2 \cdot m(\sphericalangle ACB). Să\ se\ arate\ că$:

a) $AC^2 = AB^2 + AB \cdot BC$; b) $AB + BC < 2 \cdot AC$

Soluție:

a) Fie $(BD$ bisectoarea $\sphericalangle ABC\ \big(D \in (AC)\big)$; $\Delta ABD \sim \Delta ACB\ (u.u.)\ de\ unde\ \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$, adică $AB^2 = AC \cdot AD\ \ (1)$ **2p**

Din teorema bisectoarei avem $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \Longrightarrow AD = \frac{AB\cdot DC}{BC} = \frac{AB\cdot(AC-AD)}{BC} \Longrightarrow AD = \frac{AB\cdot AC}{AB+BC}$ 1**p**

Din (1) și relația de mai sus rezultă $AC^2 = AB^2 + AB \cdot BC$. **2p**

b) Ducem $AM \parallel BD, M \in BC$.

ΔAMB și ΔAMC *sunt isoscele , iar cu teorema de existență a* ΔAMC *rezultă că*

$AB + BC < 2 \cdot AC$ ……………………………………………………………………........**2p**