ADMITERE ÎN GRUPA DE EXCELENȚĂ
Disciplina: MATEMATICĂ
28 SEPTEMBRIE 2019
barem de corectare

X

SUBIECTUL I

Pentru ce numere reale y, ecuația $x^2 + x + y^2 - 24 = 0$ are soluții reale? Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $x^2 + x + y^2 - 24 = 0$.

Soluție: $\Delta = 1 - 4 \cdot (y^2 - 24) = 1 - 4 \cdot y^2 + 96 = 97 - 4 \cdot y^2$ discriminantul ecuației............. ...**2p**

Ecuația are soluții reale în cazul $\Delta \geq 0$; $97 - 4 \cdot y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y \in \left[-\frac{\sqrt{97}}{2}; \frac{\sqrt{97}}{2}\right]$..............................**2p**

Pentru partea a doua avem $y^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow y^2 \in \{0, 1, 4, 9, 16\}$..**1p**

Analizând fiecare caz, obținem mulțimea de soluții: $\{(-5; -2);\ (-5; 2);\ (4; -2);\ (4; 2)\}$..................**2p**

SUBIECTUL II

Fie $a, b, c \in \mathbb{R}, a < b < c$ și $3a + 2c = 5b$. Arătați că:

a) $b - a = \frac{2(c-a)}{5}$;

b) numerele a, b, c sunt printre termenii unei progresii aritmetice.

Soluție: a) $5b - 5a = 2c - 2a \Longrightarrow b - a = \frac{2 \cdot (c-a)}{5}$..**2p**

b) Din a) $\Longrightarrow b = a + 2 \cdot \frac{c-a}{5}$. **2p**

Folosind și relația $c = a + 5 \cdot \frac{c-a}{5}$, rezultă că a, b, c sunt printre termenii unei progresii aritmetice cu rația $\frac{c-a}{5}$...**3p**

SUBIECTUL III

Fie ABC un triunghi și punctele $M, N \in (BC)$ astfel încât:

$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{AN} = \frac{5}{12} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{7}{12} \cdot \overrightarrow{AC}$

Arătați că $NC^2 = BM^2 + MN^2$

Soluție:

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{4} \cdot \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{4} \cdot$
$\overrightarrow{BC}$. **2p**

Dar $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AC} = -\frac{5}{12} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{7}{12} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = -\frac{5}{12} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{5}{12} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{5}{12} \cdot$
$\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{5}{12} \cdot \overrightarrow{BC}$ **2p**

Rezultă $N \in (MC)$ $și$ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{NC} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{BC}$ **1p**

Notând $BC = a, rezultă\ NC = \frac{5}{12} \cdot a, BM = \frac{1}{4} \cdot a = \frac{3}{12} \cdot a, MN = \frac{1}{3} \cdot a = \frac{4}{12} \cdot a$ **1p**

Se verifică relația $\left(\frac{5}{12} \cdot a\right)^2 = \left(\frac{3}{12} \cdot a\right)^2 + \left(\frac{4}{12} \cdot a\right)^2 \Longrightarrow NC^2 = BM^2 + MN^2$ **1p**